Die günstigste Vorkragung der Gelenke im Massiv-Zweigelenkbogen

---

Von der

Kgl. Technischen Hochschule München

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs)

genehmigte

DISSERTATION

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. JOSEPH HINGERLE

Assistent für Ingenieurwissenschaften an der Kgl. Technischen Hochschule München

---

Referent: Professor Geh. Hofrat Wilhelm Dietz
Korreferent: Professor Karl Hager

Druck von R. Oldenbourg in München
1913

Die günstigste Vorkragung der Gelenke im Massiv-Zweigelenkbogen

---

Von der

Kgl. Technischen Hochschule München

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs)

genehmigte

DISSERTATION

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. JOSEPH HINGERLE

Assistent für Ingenieurwissenschaften an der Kgl. Technischen Hochschule München

---

Referent: Professor Geh. Hofrat Wilhelm Dietz
Korreferent: Professor Karl Hager

Tag der Annahme der Dissertation: 12. November 1912

Druck von R. Oldenbourg in München
1913

Meiner Großmutter

Frau Walburga Kammerer

gewidmet.

Vorwort.

Der Erfinder der Steingelenkbogenbrücken, Geheimer Finanzrat Köpke in Dresden, hat die Seitengelenke stets in die Widerlagerfugen gelegt; als Bogenkonstruktion galt der Teil zwischen den Kämpfergelenken. Später wurde es im Brückenbau üblich, die Gelenke vorzukragen, in der richtigen Erkenntnis der damit zu erlangenden Vorteile; doch geschah dies meist gefühlsmäßig ohne rechnerische Begründung der durch die Vorkragung der Gelenke für die Standfestigkeit des Bauwerkes gewonnenen Vorteile. Erst Dr. R. Färber war es vorbehalten, in seinem als Dissertation in Stuttgart eingereichten Werke: Dreigelenkbogenbrücken, die Zweckmäßigkeit der Vorkragung der Seitengelenke des Dreigelenkbogens zahlenmäßig zu begründen und die großen Vorteile der »richtigen« Lage der Gelenke durch Beispiele zu erläutern. In folgender Abhandlung soll nun für den Zweigelenkbogen ebenfalls die günstigste Lage der Seitengelenke bestimmt werden. Die Arbeit lehnt sich in vieler Hinsicht an die Untersuchung von Dr. R. Färber an, einerseits behufs Vergleiche des Zweigelenkbogens mit dem Dreigelenkbogen, anderseits um viele Ideen des eben genannten Verfassers leichter verwerten zu können.

Nach Lösung dieser Aufgabe ist es nicht mehr nötig, für einzelne Brücken durch besondere Untersuchungen die Lage der Gelenke festzustellen, weil aus der am Schlusse angegebenen Tabelle sich die notwendigen Werte ohne weiteres ablesen lassen. Aber auch, wenn aus besonderen Gründen die günstigste Gelenklage gar nicht gesucht wird, gibt die nachstehende Untersuchung Aufschluß über die Grenze der Vorkragung, die bei einer rationellen Bogenkonstruktion unter keinen Umständen überschritten werden sollte.

München, im Mai 1912.

Jos. Hingerle.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546317_0057

Inhaltsübersicht.

Einleitung: Seite

Allgemeine Betrachtungen und Stellung der speziellen Aufgabe . . . 9

I. Dimensionierung einer Fuge im Zweigelenkbogen 11

II. Die Form des Zweigelenkbogens (Mittellinie) und nähere Umschreibung der zu lösenden Aufgabe 13

III. Festlegung des Begriffes »günstigste Vorkragung« 15

IV. Bestimmung der Maximalmomente in den einzelnen Querschnitten . 17

V. Bestimmung der günstigsten Vorkragung 31

Anwendung:

Zweigelenkbogen von gegebener Spannweite und Kämpferpfeil. Vergleich der relativen Abweichung der Stützlinie im vorgekragten und nicht vorgekragten Gewölbe 31

Einleitung.

Allgemeine Betrachtungen und Stellung der speziellen Aufgabe.

Die Beanspruchung eines Querschnittes eines Gewölbes hängt ab vom Eigengewicht, von der bewegten Last, von der Temperatur und von den elastischen Veränderungen des Bogens sowie der Widerlager (Pfeiler). Die wandernde Last, die Temperatur und die elastischen Veränderungen äußern ihre Wirkung auf einzelne Fugen durch Normalkräfte, Momente und Schubkräfte; anders die Wirkung des Eigengewichtes und der halben gleichmäßig verteilten Verkehrslast für das zugehörige Stützliniengewölbe. Wird nämlich die Mittellinie des Bogens so gewählt, daß sie mit der Stützlinie aus Eigengewicht des Bogens, der Hintermauerung, dem Gewichte der Fahrbahn und der halben, gleichmäßig verteilten Verkehrslast zusammenfällt, so treten für diese »Grundstellung« in den einzelnen Querschnitten keine Momente, sondern nur Normalkräfte auf. Man könnte für diesen Belastungsfall beliebig vorgekragte Gelenke anordnen, ohne dadurch das Gleichgewicht zu stören. Es ist also – wenn die Form auf diese Weise bestimmt wurde – die »Grundstellung« ohne Einfluß auf eine Vorkragung der Gelenke. Anders verhält es sich mit den Momenten und Normalkräften aus der wandernden Last, aus den Beanspruchungen durch Temperaturänderungen gegenüber der Aufstellungstemperatur und aus Momenten, die von elastischen Veränderungen des Bogens und der Widerlager (Pfeiler) herrühren.

Da die letzteren Kräfte (Temperatureinflüsse und elastische Änderungen) bei einem gut durchgebildeten Bogen ohne großen Einfluß sind, mögen sie bei der endgültigen Dimensionierung wohl Berücksichtigung finden, nicht aber bei der Festlegung der Vorkragung in Rechnung gezogen werden.

Wir beschränken uns daher hinsichtlich der Bogenform auf das Stützliniengewölbe für Eigengewicht und halber gleichmäßig verteilter Verkehrslast, hinsichtlich der Lasten auf die wandernde Verkehrslast für die Berechnung der »günstigsten« Vorkragung.

I. Dimensionierung einer Fuge im Zweigelenkbogen.

Sind von einem rechteckigen Querschnitt die Normalkraft N, die Exzentrizität n und die Breite b ($= 1{,}00$) bekannt, so kann bei gegebenen Grenzbeanspruchungen (σ_0 und σ_u) die Höhe des Querschnittes bestimmt werden. Es ergeben sich zwei Lösungen, von denen aber nur diejenige brauchbar ist, die für die andere Beanspruchung einen Wert innerhalb der zulässigen Grenze ergibt. Werden — wie es im Brückenbau üblich — nur die einfachen, auf der »Hookeschen« Voraussetzung gewonnenen Beziehungen zwischen Moment und Biegungsbeanspruchung angewandt, so ergibt sich bei gegebenen N und n

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{N}{F_0} + \frac{N \cdot n}{\mathfrak{W}_0} = \frac{N}{b \cdot h_0} + \frac{N \cdot n \cdot 6}{b \cdot h_0^2} \\ \sigma_u &= \frac{N}{F_u} - \frac{N \cdot n}{\mathfrak{W}_u} = \frac{N}{b \cdot h_u} - \frac{N \cdot n \cdot 6}{b \cdot h_u^2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

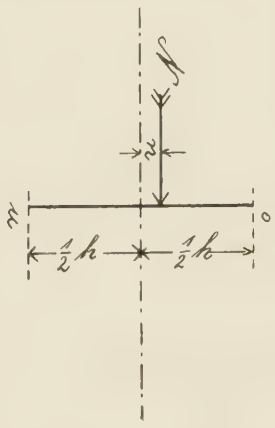

Fig. 1.

Dabei bedeutet:

F_0, F_u den Inhalt des Querschnittes,

$\mathfrak{W}_0$, $\mathfrak{W}_u$ das Widerstandsmoment des Querschnittes,

$N \cdot n$ das Angriffsmoment, bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnittes,

N die Normalkraft für den betreffenden Querschnitt,

σ_0 bzw. σ_u die Grenzbeanspruchungen in der obersten bzw. untersten Faser.

Für h_0 und h_u ergibt sich nun

$$h_0^2 \cdot \sigma_0 = \frac{N \cdot h_0}{b} + \frac{6 \cdot N \cdot n}{b},$$

daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= \frac{N}{2 \cdot b \cdot \sigma_0} \left(\pm\right) \sqrt{\frac{N^2}{4\, b^2 \cdot \sigma_0^2} + \frac{6 \cdot N \cdot n}{b \cdot \sigma_0}} \\ h_u &= \frac{N}{2\, b \cdot \sigma_u} \left(\pm\right) \sqrt{\frac{N^2}{4\, b^2 \cdot \sigma_u^2} - \frac{6 \cdot N \cdot n}{b \cdot \sigma_u}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nur der größere von den zwei Werten h_0 und h_u ist brauchbar.

Im Zweigelenkbogen kommen in jeder Fuge Normalkräfte vor, die einen Ausschlag nach oben oder nach unten haben. War es schon unmöglich, für eine einzige Normalkraft bei gegebener Exzentrizität die Dimensionierung nach zwei Grenzwerten der zulässigen Spannung vorzunehmen, um das Material damit »auszunützen«, so ist dies noch weniger bei zwei Normalkräften möglich. Wir müssen uns daher begnügen, nur nach dem »ungünstigsten« Fall zu dimensionieren und für die anderen Fälle das Material nicht voll verwertet zu lassen. Dr. R. Färber hat in seinem Buch »Der Dreigelenkbogen« ein Verfahren angegeben, bei dem es möglich wird, durch besondere Formbestimmung der Mittellinie des Bogens zu erreichen, daß in der Bruchfuge die zulässigen Grenzen von σ_0 und σ_u erreicht werden. Auch für den Zweigelenkbogen wäre es möglich, eine solche Formgebung durchzuführen, doch spielt sie für diesen keine große Rolle, und zwar aus folgenden Gründen:

Zweigelenkbogenbrücken kommen im Steinbrückenbau meist dann zur Ausführung, wenn die geringe Konstruktionshöhe einen eingespannten oder Dreigelenkbogen nicht mehr rationell möglich macht oder um die den Stoßwirkungen unmittelbar ausgesetzten Scheitelgelenke zu vermeiden. Es treten aber bei Bögen mit geringer Stichhöhe die Normalkräfte in bezug auf die Momente bedeutend in Erscheinung, so daß bei der Bestimmung von h_0 und h_u der brauchbare Wert wenig von dem unbrauchbaren Wert verschieden ist. (Vgl. Bestimmung von h_0 und h_u nach Gl. (2).) Abgesehen von dem meist geringen Stich fallen — wie die nachfolgende Berechnung ergibt[1]), die Max.-Momente im Zweigelenkbogen um etwa 20% geringer aus, als bei gleicher Form die Max.-Momente im Dreigelenkbogen, so daß auch aus diesem Grunde h_0 und h_u sich nicht besonders stark unterscheiden.

Würde man also — wie es Dr. R. Färber für den Bogen mit drei Gelenken getan — die Gesamtanordnung der Bogenform so gestalten, daß in der »Bruchfuge« die beiden Grenzwerte erreicht werden,

[1]) Siehe auch Wilh. Keck, Elastizitätslehre, neu bearbeitet von Dr.-Ing. Ludwig Hotopp 1908.

so wäre beim Zweigelenkbogen der erzielte Gewinn sehr gering, da sich auch ohne eine solche Formgebung die beiden Grenzwerte nahezu erreichen lassen.

Wir werden also jede Fuge so dimensionieren, daß nur eine der zulässigen Grenzspannungen erreicht und die andere nie überschritten wird. Diese praktische Beschränkung ergibt uns die Form der Mittellinie des Bogens, ohne daß die Auskragung bekannt sein muß. Die nächste Aufgabe ist also die Bestimmung der Mittellinie des Zweigelenkbogens. Die Lösung der Aufgabe ist weiterhin beschränkt auf ein symmetrisches Gewölbe mit horizontaler Kämpferverbindungsgeraden.

II. Die Form des Zweigelenkbogens (Mittellinie) und nähere Umschreibung der zu lösenden Aufgabe.

Für die Bestimmung der Gewölbemittellinie ist nach den Untersuchungen von Tolkmitt und anderen die sog. Normalbelastung maßgebend, d. i. die Belastung aus dem Eigengewicht des Bogens, der Hintermauerung, dem Gewicht der Fahrbahnkonstruktion und der Hälfte der für die ungünstigste einseitige Belastung anzunehmenden Verkehrsbelastung[1]).

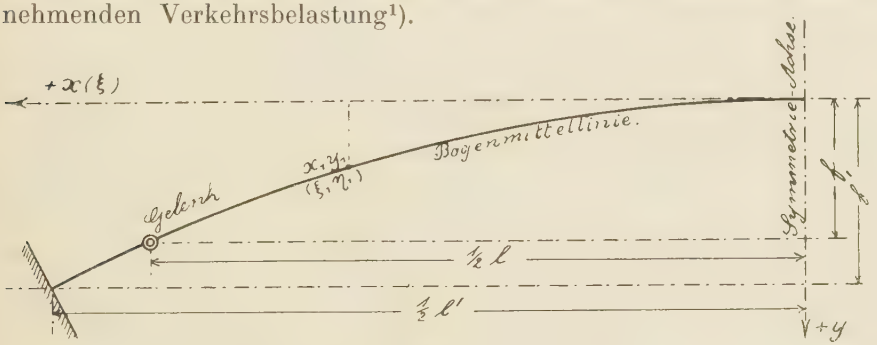

Fig. 2.

Die Bestimmung der Bogenform kann graphisch oder rein rechnerisch durchgeführt werden. Die Mittellinie ist dann durch eine Kurve über einer Geraden l', die durch den Abstand der beiden Kämpfer-

[1]) Siehe Müller-Breslau, Elastizitätstheorie der nach der Stützlinie geformten Tonnengewölbe, Zeitschrift für Bauwesen 1886, S. 281. Vgl. Handbuch für Ingenieurwissenschaften; der Brückenbau, 4. Aufl., 1904, S. 165.

mittelpunkte gegeben ist, und durch die größte Ordinate f', dem Kämpferpfeil, gegeben. Um diese endgültig bestimmte Kurve für die weitere Behandlung geeignet zu machen, wollen wir sie auf einen analytisch geschlossenen Ausdruck bringen, wobei wir eine solche Ersatzkurve wählen, wie sie für den Dreigelenkbogen Dr. R. Färber angewandt hat. Dies hat den großen Vorteil, daß wir alle Ergebnisse des Zweigelenkbogens ohne weiteres mit den für den Dreigelenkbogen vergleichen können. Es sei also für Figur 2

$$\xi = \frac{x}{\frac{l}{2}}, \quad \eta = \frac{y}{f}, \quad \varphi = \text{Festwert.}$$

$$\eta = \frac{1}{(1+\varphi)}\,\xi^2\,(1+\varphi\,\xi^2)^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ist durch die oben angegebene Formgebung l', f' und ein Punkt x_1, y_1 der Gewölbeachse (meist der Mittelpunkt in der halben Bogensehne, d. h. $x_1 \cong \frac{l'}{4}$) bekannt, so ergibt sich

$$\eta_1 = \frac{y_1}{f'}; \qquad \xi_1 = \frac{x_1}{\frac{l'}{2}};$$

$$\eta_2 = 1 = \frac{f'}{f'}; \quad \xi_2 = \frac{\frac{l'}{2}}{\frac{l'}{2}} = 1;$$

$$\eta_1 = \frac{1}{1+\varphi}\cdot\xi_1^2\,(1+\varphi\cdot\xi_1^2) = \frac{1}{\varphi'}\cdot\xi_1^2\,(1+\varphi\cdot\xi_1^2),$$

wenn zur Abkürzung $\varphi' = (1+\varphi)$ gesetzt wird.

$$\eta_1\,\varphi' = \xi_1^2 + \varphi\cdot\xi_1^4.$$

Hieraus

$$\varphi = \frac{-\eta_1 + \xi_1^2}{+\eta_1 - \xi_1^4} = \frac{-\frac{y_1}{f'} + \left(\frac{x}{\frac{l'}{2}}\right)^2}{+\frac{y_1}{f'} - \left(\frac{x_1}{\frac{l'}{2}}\right)^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[1]) Fr. R. Färber, Dreigelenkbogen, S. 32, Gl. 37.

Der Wert von φ, und damit auch von φ', läßt sich stets rasch ermitteln. Der Ersatz unserer Gewölbemittellinie durch diese Kurve genügt den Anforderungen, die wir bei Zweigelenkbogen stellen können. Weil nach Untersuchungen von Müller-Breslau, und Landsberg für viele Fälle nur eine »einfache« Parabel als Ersatzkurve notwendig ist, genügt um so mehr eine Parabel höherer Ordnung. Sollte übrigens für einen besonderen Zweck diese Ersatzparabel nicht den Anforderungen genügen, so steht es ja frei — nach der Lösung der hier gestellten Aufgabe die günstigste Vorkragung zu ermitteln — eine genauere Berechnungsmethode anzuwenden.

Wir betrachten die weitere Berechnung nur noch unter dem Gesichtspunkt, daß gegeben sind:

1. Die Form der Bogenmittellinie durch die Gleichung

$$\eta = \frac{1}{\varphi'} \xi^2 (1 + \varphi \cdot \xi^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2. Die Kämpferspannweite l', die Pfeilhöhe über dem Kämpfer f' und

3. die Belastung der Verkehrslast, bestehend aus einer gleichmäßig verteilten wandernden Last, die den jeweiligen Vorschriften zu entsprechen hat.

Gesucht wird:

Die Gelenkspannweite l und die zugehörige Pfeilhöhe f.

Die gestellte Aufgabe läßt sich nicht direkt lösen, sondern indirekt dadurch, daß wir umgekehrt zu einer angenommenen Gelenkspannweite l und zugehörigem Gelenkpfeil f die zugehörige Kämpferspannweite l' suchen. Es läßt sich dann eine Tabelle aufstellen, aus der man ohne besondere Mühe zu einem gegebenen l' und f' das zugehörige l und f ablesen resp. interpolieren kann.

III. Festlegung des Begriffes „günstigste Vorkragung“.

Man kann verschiedene Gesichtspunkte für die Beantwortung der Frage »günstigste Vorkragung« geltend machen: z. B. die geringste Bewegung des Scheitels, die geringste Temperaturwirkung, einen Kleinstwert des Horizontalschubs usw. Maßgebend ist in der folgenden Untersuchung der relative geringste Ausschlag der Stütz-

linie für die bewegte Last aus der Mittellinie des Gewölbebogens. Wir wollen nicht den absoluten Betrag des Ausschlages zum Maßstab nehmen, sondern das Verhältnis des absoluten Betrages zur zugehörigen Bogenstärke für die Grundstellung, weil die Bogenstärke für die Grundstellung in den einzelnen Fugen wechselt und bei den stärkeren Fugen der Anschlag verhältnismäßig weniger ins Gewicht fällt als bei den schwächeren Fugen.

Der Ausschlag der Stützlinie für die bewegte Last ist gegeben durch die Gleichung $n = \frac{M}{N}$, da ja das Moment M durch die Exzentrizität n der Normalkraft N hervorgerufen wird. Der relative Ausschlag ist daher dargestellt durch

$$\mu = \frac{n}{h_g} = \frac{M}{N \cdot h_g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wobei h_g die Fugenstärke an der betrachtenden Stelle für die Grundstellung ist. Diese Gleichung läßt sich, was ohne erheblichen Fehler zulässig ist, auf eine andere Form bringen, wenn wir setzen

$$N = N_g \pm N_b \simeq N_g \text{ und } N_g = H_g \sqrt{1 + y'^2},$$

wobei H_g den Horizontalschub für die Grundstellung darstellt, $\sqrt{1 + y'^2}$ den cos des Neigungswinkels der Bogenmittellinie an der betrachteten Stelle und N_b die Normalkraft durch die Verkehrslast. Auch h_g läßt sich durch N_g ausdrücken und zwar:

$$h_g = \frac{N_g}{b \cdot \sigma} = \frac{H_g \sqrt{1 + y'^2}}{b \cdot \sigma},$$

$$\text{d. h. } \mu = \frac{\pm \mathfrak{M}}{N_g h_g} = \frac{\pm \mathfrak{M} \cdot b \cdot \sigma}{H_g \sqrt{1 + y'^2}\, H_g \sqrt{1 + y'^2}} \alpha \frac{\pm \mathfrak{M}}{1 + y'^2} \quad . \quad (5a)$$

Die konstanten Glieder von μ sind unter α zusammengefaßt. Tragen wir die max. Werte von μ als Ordinaten über der Kämpferverbindungsgeraden auf, so ergibt sich eine Kurve, die den Verlauf des relativen Ausschlages der Stützlinie für die bewegte Last angibt. Lassen wir die Gelenke mit der Kämpferfuge zusammenfallen, so erreicht μ an einer bestimmten Stelle seinen Höchstwert. Kragen wir ein gewisses Stück vor, so sinkt dieser Wert, da sich M mit dem Quadrat der Spannweite ändert. Zu gleicher Zeit entsteht aber ein Ausschlag der Drucklinie in den äußeren Bogenteilen. Wir können also eine Verminderung des Ausschlages im inneren Bogenteil nur so lange

erreichen, bis der relative Ausschlag μ außen gleich dem Wert μ im inneren Bogen geworden ist, d. h.

$$\max \frac{\pm \mathfrak{M}}{1 + y'^2} \text{ im äußeren Bogenteil} =$$

$$= \max \pm \frac{\mathfrak{M}}{1 + y'^2} \text{ im inneren Bogenteil.}$$

Wir haben daher zuerst eine Berechnung der max. Momente vorzunehmen und dann die entsprechenden Ausdrücke $\frac{\pm \mathfrak{M}}{1 + y'^2}$ zu bilden. Für die Vorkragung der Gelenke bei Gerberträgern wird meist eine ähnliche Bedingung verlangt. An Stelle des Ausdruckes $\frac{\mathfrak{M}}{1 + y'^2}$ tritt dort M allein, weil eine Normalkraft fehlt. Das Maximalmoment tritt dann dreimal auf und vermindert sich im Verhältnis des Quadrates der Auflagerabstände zum Quadrat der Gelenkspannweite.

IV. Bestimmung der Maximalmomente in den einzelnen Querschnitten.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe hat für den Dreigelenkbogen wie für den Zweigelenkbogen K e c k gegeben[1]). Für unseren speziellen Zweck müssen wir aber in einzelnen Querschnitten die max. Momente bestimmen und besonders für die Parabel höherer Ordnung ausrechnen.

Zur Bestimmung des Maximalmomentes in einem beliebigen Querschnitt müssen wir die Mittelpunktskoordinaten, die Belastungsscheiden und die äußeren Kräfte (Auflagerwiderstände) kennen. Die Fugenschwerpunkte sind durch die Gleichung der Bogenmittellinie gegeben. Die Bestimmung der Belastungsscheiden ist erst möglich, wenn wir die Kämpferdrucklinie, die Bestimmung der äußeren Kräfte, wenn wir die Einflußlinie für den Horizontalschub kennen.

Diese Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt. Zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größe müssen die Bogenspannweite l,

[1]) Vgl. W. K e c k, Vorträge über Elastizitätslehre, 2. vermehrte Auflage, neu bearbeitet von Dr.-Ing. Ludwig H o t o p p.

die Kämpferpfeilgröße f, das elastische Verhalten des Baustoffes sowie die Querschnittsabmessungen des Bogens bekannt sein.

Die Einflußlinie für den Horizontalschub ist dann nach Müller-Breslau[1]), für den nach einer gewöhnlichen Parabel geformten Bogen eine Parabel, deren Pfeil durch die Formel bestimmt ist.

$$z = \frac{3\,l}{16\,f} \cdot \nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

wobei

$$\nu = \frac{1 + \frac{5}{4\,f \cdot r}\left(\frac{E}{G} \cdot \frac{J_c}{F_s} - 2\,\frac{J_c}{F_c} \cdot \frac{c}{r}\right)}{1 + \frac{10}{l^2} \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{F_s} + \frac{15}{8\,f^2} \cdot \frac{c^2}{r^2} \cdot \frac{I_c}{F_c}}.$$

Hierbei ist r der Radius eines Kreises, der durch den Scheitelfugenmittelpunkt und durch den Kämpferfugenmittelpunkt bestimmt ist, wonach $c = r - f$ ist. Bei rechteckigem Querschnitt wird $F_s = 1{,}2 \cdot F_c$, wobei F_c den Mittelwert der $\frac{\cos\varphi}{F}$ = Werte, sowie E und G die Elastizitätszahlen für Biegungs- und Schubfestigkeit bedeuten.

Je nach der Bedeutung der auszuführenden Berechnung kann man diese Gleichung vereinfachen. So ersetzt Müller-Breslau[2]), die obige Gleichung durch den einfachen Wert

$$z_0 = \frac{l^2}{8\,F_y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wobei F_y die Fläche darstellt, welche von der Verbindungslinie der Gelenke und von der Bogenachse umschlossen ist. Wir sind berechtigt, mit diesem einfachen Wert zu rechnen und die kleinen Kragarme als starr anzunehmen, weil es uns hier nur auf Verhältnisse ankommt. Die endgültige Dimensionierung des Bogens — nach der Bestimmung der günstigsten Vorkragung — kann dann nach einem beliebigen, aber streng gültigen Verfahren vorgenommen werden.

Für die parabelförmige H-Einflußlinie ist die Kämpferdrucklinie eine wagerechte Gerade im Abstande

$$y_k = -\frac{1}{4 \cdot z_0}$$

von der Verbindungslinie der beiden Gelenke.

[1]) Bd. II, 2. Abt., S. 519, 2. Aufl.
[2]) Müller, Breslau, Bd. II, 2. Abt., S. 523.

Nach der gewählten Formel für die Berechnung von z_0 ergibt sich für y_k

$$y_k = \frac{2 F_y}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wir haben jetzt sehr einfache Beziehungen zwischen unseren Bogenmittellinien und den zugehörigen Einflußlinien erhalten. Die Bestimmung der Belastungsscheiden und der äußeren Kräfte läßt sich jetzt in geschlossenen Formeln ausdrücken, die uns die weitere Lösung der Aufgabe ermöglichen.

Momente, bezogen auf den Mittelpunkt einer Gewölbefuge, können nach unseren Voraussetzungen — es ist die Bogenmittellinie Stützlinie für die Grundstellung — nur durch Veränderung der wandernden Last in bezug auf die Grundstellung hervorgebracht werden. (Die Momente durch Temperaturänderung, elastische Änderung des Bogens und der Widerlager sollen der Voraussetzung gemäß nicht in Rechnung gezogen werden.) Diese Momente können sowohl positiv wie negativ werden. Uns interessiert vor allem das größte positive und das größte negative Moment für einen Querschnitt. Mittels der bekannten Kämpferdrucklinie und der Kernpunkte lassen sich für einen bestimmten Querschnitt die Belastungsscheiden angeben. Die Belastungsscheidepunkte für einen Querschnitt sind die Schnittpunkte der Verbindungslinien der Kernpunkte mit dem zugehörigen Gelenkmittelpunkt und der Kämpferdrucklinie. Der eine Punkt gibt die Belastungsgrenze für das max. positive, der andere für das max. negative Moment an. Der Unterschied zwischen den Belastungsgrenzen des positiven und negativen Moments ist aber derart gering, daß es für unsere Zwecke jedenfalls genügt, statt der Kernpunkte die Querschnittsmittelpunkte zu wählen. Abgesehen von dem Wegfall der Querschnittsdimensionen aus den Gleichungen erhalten wir dadurch den besonderen Vorteil, daß das maximale positive Moment für einen Querschnitt gleich dem maximalen negativen Moment des Querschnittes wird. Auch für die Dreigelenkbogen hat Dr. R. F ä r b e r von dieser Vereinfachung Gebrauch gemacht.

Unter dieser praktischen Annahme ergibt sich für unsere Bogenmittellinie $y = \frac{1}{\varphi'} \xi^2 (1 + \varphi \cdot \xi^2)$ die Lage der Belastungsscheiden wie folgt:

$$\frac{k}{y_k} = \frac{\frac{l}{2} - x}{f - y} = \frac{x - \frac{l}{2}}{y - f},$$

$$k = y_k \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)}{(y - f)} = \frac{2 F_y}{l} \cdot \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)}{y - f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

F_y (Fläche, begrenzt von der Verbindungslinie der beiden Gelenkmittelpunkte und der Bogenmittellinie).

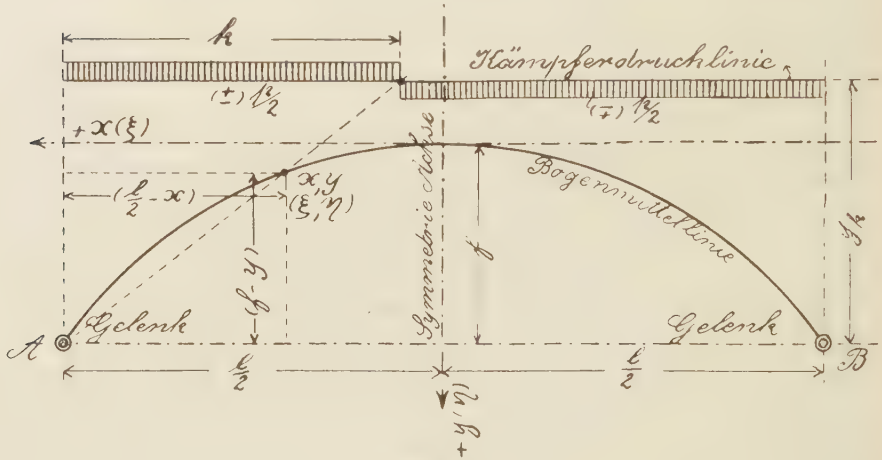

Fig. 3.

$$F_y = \frac{2 \cdot f \cdot l\,(5 + 6\,\varphi)}{15\,\varphi'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$y_k = \frac{4 f\,(5 + 6\,\varphi)}{15\,\varphi'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Für k, dem Abstand des Belastungsscheidepunktes von einem Gelenk, ergibt sich also aus Gleichung (9)

$$k = \frac{4 f\,(5 + 6\,\varphi)\left(x - \frac{l}{2}\right)}{15\,\varphi'\,(y - f)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Führt man für x und y die Beziehung für $\xi\,\eta$ ein, so ergibt sich

$$\frac{k}{\frac{l}{2}} = \varkappa = \frac{4\,(5 + 6\,\varphi)}{15\,\varphi'} \cdot \frac{1 - \xi}{1 - \eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Es gibt Punkte der Bogenmittellinie, für die zwei Belastungsscheidepunkte vorhanden sind. Dies trifft zu, wenn die beiden Verbindungslinien — rechtes und linkes Gelenk mit einem Punkt der Bogenmittellinie — Schnittpunkte mit der Kämpferdrucklinie innerhalb der Gelenke haben. Die maßgebenden Punkte liegen etwa zwischen $\xi = +0{,}3$ und $\xi = -0{,}3$.

Die Entfernung k' des zweiten Belastungsscheidepunktes von der linken Gelenkpunktsvertikalen kann man aus k'' (siehe Fig. 4)

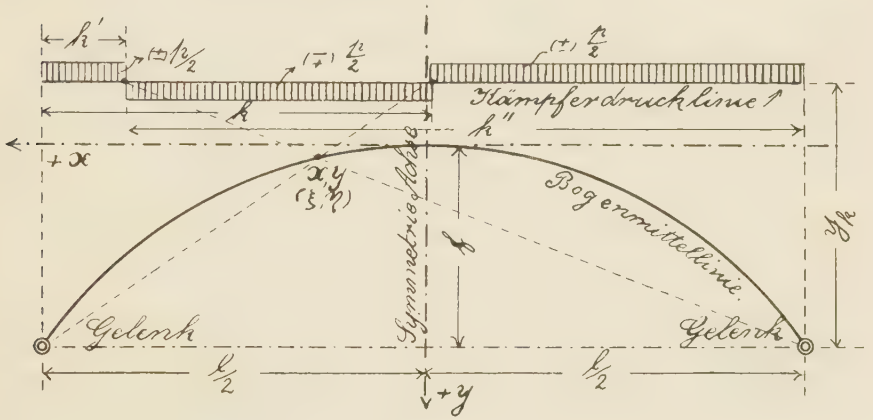

Fig. 4.

berechnen. Die Lage k'' genügt derselben Gleichung wie k, nur mit geändertem Vorzeichen x (ξ).

$$k'' = \frac{4f(5+6\varphi)}{15\varphi'} \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}+x\right)}{(f-y)},$$

$$k' = l - k'' = l - \frac{4f(5+6\varphi)}{15\varphi'} \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}+x\right)}{(f-y)},$$

$$\frac{k'}{\frac{l}{2}} = \varkappa' = 2 - \frac{4(5+6\varphi)}{15\varphi'} \cdot \frac{1+\xi}{1-\eta}.$$

Der Wert $\varkappa'$ kommt für die Lösung unserer Aufgabe nicht in Frage, da die maßgebende Fuge etwa zwischen (x) $\xi = 0{,}4$ und $0{,}5$ liegt, wobei es nur einen Belastungsscheidepunkt gibt.

Bis jetzt haben wir bloß Punkte innerhalb der Gelenke betrachtet. In Übereinstimmung mit der von Dr. R. Färber entwickelten

Auffassung des Bogens im weiteren Sinne haben wir auch noch Punkte der Bogenmittellinie außerhalb der Gelenke zum Bogen festzulegen und demgemäß in unsere Betrachtungen miteinzubeziehen.

Nach Fig. 5 ergibt sich die Proportion

$$\frac{k}{y_k} = \frac{x - \frac{l}{2}}{y - f},$$

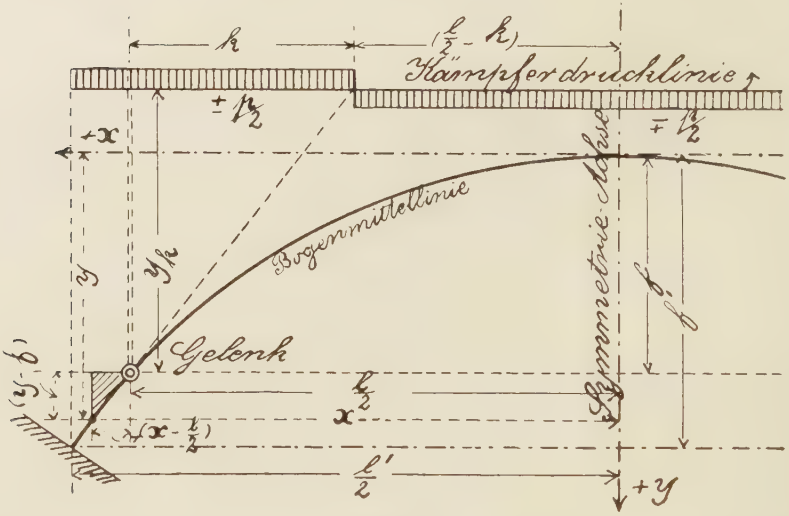

Fig. 5.

das ist aber die gleiche Beziehung, wie sie für einen Punkt innerhalb der Gelenke gefunden wurde. Es ergeben sich für k und $\varkappa$ die gleichen Werte wie sie bereits für diese Punkte gefunden wurde.

$$k = \frac{4f(5 + 6\varphi)}{15\varphi'} \cdot \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)}{(y - f)},$$

$$\varkappa = \frac{4(5 + 6q)}{15\varphi'} \cdot \frac{(\xi - 1)}{(\eta - 1)}.$$

Für Punkte außerhalb der Gelenke gibt es stets nur einen Belastungsscheidepunkt.

Die Einflußlinie für den Horizontalschub ist nach den vorstehenden Betrachtungen gegeben durch eine Parabel von der Pfeilhöhe z_0. Wobei nach Gleichung (7)

$$z_0 = \frac{l^2}{8F_v}.$$

F_y ist die Fläche der Bogenmittellinie, die durch die Verbindungslinie der beiden Gelenkmittelpunkte begrenzt ist. Analytisch stellt sich F_y dar zu

$$F_y = f \cdot l - 2\int_{x=0}^{x=+\frac{l}{2}} y \cdot dx = f \cdot l - 2\int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} 4f \cdot \frac{x^2}{l^2} \frac{1 + 4\varphi \frac{x^2}{l^2}}{\varphi'} dx$$

$$= f \cdot l - 2 \cdot \frac{4f}{l^2 \cdot \varphi'} \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \left(x^2 + \frac{4 \cdot \varphi \cdot x^4}{l^2} \right) dx =$$

$$= f \cdot l - \frac{8 \cdot f}{\varphi' \, l^2} \left\{ \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} x^2 \cdot dx - \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \frac{4 \cdot \varphi \cdot x^4}{l^2} dx \right\}$$

$$= f \cdot l - \frac{f \cdot l}{3\varphi'} - \frac{\varphi f \cdot l}{5\varphi'} = \frac{15\varphi' \cdot f \cdot l - 5f \cdot l - 3\varphi f \cdot l}{15\varphi'}$$

$$= \frac{f \cdot l}{15\varphi'} \{15\,(1 + \varphi) - 5 - 3\varphi\}$$

$$F_y = \frac{2 \cdot f \cdot l}{15\varphi'} (5 + 6\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die Ordinate der H-Einflußlinie ergibt sich daraus zu

$$z_0 = \frac{l^2}{8F_y} = \frac{l^2}{8 \frac{2f \cdot l}{15\varphi'} (5 + 6\varphi)} = \frac{l}{2} \frac{15\varphi'}{8 \cdot f (5 + 6\varphi)}.$$

Aus der Einflußlinie lassen sich nun die Werte von H für die gegebenen Belastungslängen (k) aufstellen. Für die Belastungslänge k ergibt sich der zugehörige Horizontalschub aus

$$H_k = q \cdot F_k,$$

wobei q die Belastungsgröße bezogen auf die Längeneinheit, F_k die Fläche der Einflußlinie auf die Strecke k vorstellt.

Für die Parabel $y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$ wird hierfür

$$F_k = \frac{4\,z_0}{l^2} \left[\frac{k^3}{3} - \frac{k^2 \cdot l}{2} \right],$$

mithin

$$H_k = q \cdot F_k = q \cdot \frac{4 \cdot z_0}{l^2} \left[\frac{k^3}{3} - \frac{k^2 \cdot l}{2} \right]$$

$$= q \cdot \frac{4 \cdot l}{2 \cdot l^2} \cdot \frac{15\,\varphi'}{8 \cdot (5 + 6\,\varphi) \cdot f} \left[\frac{k^3}{3} - \frac{k^2 \cdot l}{2} \right]$$

$$H_k = \frac{q}{4} \cdot \frac{15\,\varphi' \cdot k^2}{(5 + 6\,\varphi)\, l \cdot f} \cdot \left[\frac{k}{3} - \frac{l}{2} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Erstreckt sich die Belastung über die ganze Spannweite, so ergibt sich ($k = l$)

$$H_l = q \cdot \frac{15\,\varphi' \cdot l^2}{24\,(5 + 6\,\varphi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Setzt man für k den Wert ein, wie er sich für einen bestimmten Punkt x, y (ξ, η) errechnet, so ergibt sich

$$H_k = \frac{q \cdot l^2}{2\,f} \cdot \frac{(1 - \xi)^2}{(1 - \eta)^2} \cdot \frac{(5 + 6\,\varphi)}{15\,\varphi'} \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{(1 - \xi)}{(1 - \eta)} \cdot \frac{5 + 6\,\varphi}{15\,\varphi'} \right) \quad (13)$$

Die vertikalen Auflagerwiderstände A ergeben sich nach den gewöhnlichen Hebelgesetzen (Fig. 5)

$$A_k = q \cdot k \frac{l - \frac{k}{2}}{l}.$$

Für $k = l$ wird

$$A_l = \frac{1}{2}\, q \cdot l = \frac{1}{4}\, p \cdot l,$$

wobei die Belastungsintensität $q = \frac{p}{2}$.

$$A_k = \frac{p \cdot l}{4} \left(k \frac{4 - \frac{2\,k}{l}}{l} - 1 \right).$$

Nach der Bestimmung der äußeren Kräfte können wir nun die Momente für einen Punkt der Bogenachse aufstellen. Bezeichnen wir als positive Momente jene, welche die Bogenachse nach oben krümmen, so ergibt sich nach Einführung von A und H

$$\pm M = A \left(\frac{l}{2} - x \right) - H\,(f - y) - q\,\frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 \quad . \quad . \quad (14)$$

Es ist dabei gleichgültig, ob sich x, y auf einen Punkt innerhalb oder auf einen Punkt außerhalb der Gelenke bezieht.

Um für das größte positive und für das größte negative Moment gleich aufgebaute Ausdrücke zu erhalten, die sich nur dem Vorzeichen, nicht aber der Größe und Form nach unterscheiden, benutzen wir das von W. Keck [1]) angegebene Verfahren und zwar:

Wir denken uns den ganzen Träger, von dem Normalbelastungsfall ausgehend, mit $\frac{p}{2}$ belastet und nehmen außerdem links von dem Belastungsscheidepunkt p fort, das andere Mal nehmen wir, gleichfalls von dem Normalbelastungsfall ausgehend, auf die ganze Trägerlänge $\frac{p}{2}$ weg und belasten rechts vom Belastungsscheidepunkt mit p. Es ergibt sich dann in bezug auf die zugehörigen Fugenmittelpunkte unter der getroffenen Annahme einer parabolischen Bogenachse

$$+ M_{\max} = - M_{\max}.$$

In k ausgedrückt stellt sich M wie folgt dar

$$\pm M = \frac{p \cdot l^2}{16} \left[2 \left(k \frac{4 - 2\,\frac{k}{l}}{l} - 1 \right) (1 - \xi) - 8 \cdot \frac{5 + 6\varphi}{15\,\varphi'} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(1-\xi)^2}{(1-\eta)^2} \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{5 + 6\varphi}{15\,\varphi'} \cdot \frac{(1-\xi)}{(1-\eta)} \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{15\,\varphi'}{5 + 6\varphi} \right].$$

Drückt man k durch ξ und η aus, so folgt

$$\pm M = \frac{p \cdot l^2}{16} \left[- \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{5 + 6\varphi}{15\,\varphi'} \right)^2 \cdot \frac{(1-\xi)^2}{(1-\eta)^2} (1 - \xi) + \right.$$

$$+ 8 \cdot \frac{5 + 6\varphi}{15\,\varphi'} \cdot \frac{(1-\xi)}{(1-\eta)} (1 - \xi) - 2 (1 - \xi) +$$

$$\left. + \frac{15\,\varphi'}{3\,(5 + 6\varphi)} (1 - \eta) - (1 - \xi)^2 \right] = \frac{p \cdot l^2}{16} \cdot f(\xi, \eta, \varphi) \quad (15)$$

Dieser Ausdruck für $\pm M$ wurde nicht weiter vereinfacht, weil damit für die Auswertung kein besonderer Vorteil zu erlangen wäre. Er gibt für einen bestimmten Punkt der Mittellinie das größte mögliche positive oder negative Moment an. Wie Keck bereits nachweist, ist dieser Wert unabhängig von der Pfeilhöhe f des Bogens und bestimmt durch l, ξ und φ.

[1]) Siehe Hotopp, Vorträge über Elastizitätslehre von W. Keck, S. 88.

Für die einfache Parabel, d. h. $\varphi = 0$ nimmt der Ausdruck für M die Form an

$$\pm M = \frac{p \cdot l^2}{16} \cdot \frac{2}{27} \cdot \frac{(\xi - 1)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)}{(1+\xi)^2} [-27\,\xi^2 - 18\,\xi - 3] \quad (15\,a)$$

Das absolute Maximalmoment tritt an der Stelle $\xi = 0{,}535$ auf, wie man durch Auflösung der Gleichung $\frac{d\,M}{d\,\xi} = 0$ findet.

Für den Dreigelenkbogen hat sich ergeben

$$\xi = 0{,}532\,[1]).$$

Nach Art der von Dr. R. Färber aufgestellten Tabelle wurden nun die Maximalmomente für angenommene ξ und φ ermittelt, und in der folgenden Tabelle dargestellt.

Tabelle I.

$$\pm M = f(\xi, \eta, \varphi)$$

$$\rightarrow \xi = \frac{2\,x}{l}.$$

$\varphi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	$\varphi =$
0	0,148	0,152	0,180	0,207 (0,211)	0,242	0,257	0,254	0,229	0,180	0,104	—	0,133	0,298	0,494	0,724	0,986	0
0,2	—	—	—	(0,212)	0,241	0,259	0,258	0,237	0,190	0,113	—	0,153	0,353	0,606	0,913	1,285	0,2
0,4	—	—	—	(0,212)	0,241	0,259	0,261	0,243	0,195	0,119	—	0,169	0,395	0,689	1,053	1,533	0,4
0,6	—	—	—	(0,213)	0,241	0,260	0,264	0,247	0,205	0,125	—	0,180	0,428	0,753	1,169	1,692	0,6
0,8	—	—	—	(0,214)	0,241	0,261	0,266	0,252	0,210	0,129	—	0,190	0,453	0,803	1,255	1,802	0,8

Es wurde für $\xi \geq 0{,}300$ die obige Gleichung für M benutzt, obgleich kurz vorher der Geltungsbereich für die Gleichung aufhört, weil von $\xi \sim 0{,}3$ ab zwei Belastungsscheidepunkte in Frage kommen. Da wir aber den wirklichen Wert an dieser Stelle nicht brauchen, wurde der angenäherte Wert eingesetzt; es ist jedenfalls nützlich, den Verlauf der Maximalwerke in der Nähe der maßgebenden Fuge zu charakterisieren. Nur für die einfache Parabel wurde auch für $\xi = 0{,}3,\ 0{,}2,\ 0{,}1,\ 0{,}0$ der Wert $\pm M$ bestimmt (vgl. Tab. I).

In Fig. 6 wurden nun die Werte für den geraden Balken, für den Dreigelenkbogen $\varphi = 0$ und für den Zweigelenkbogen ($\varphi = 0$) aufgetragen. Der Verlauf der Kurve für den Balken ist bestimmt durch

[1]) Siehe Dr. R. Färber.

eine Parabel mit der Pfeilhöhe $\frac{p}{2} \cdot \frac{l^2}{8}$, wenn wir als Belastung auf die Längeneinheit $\frac{p}{2}$ annehmen. Die Werte für den Dreigelenkbogen wurden aus der Arbeit von Dr. R. Färber entnommen. Die Fig. 6 läßt in anschaulicher Weise das Biegungsmoment M_{max} erkennen, welches die in bezug auf den Normalbelastungsfall möglichst ungünstig gestellte gleichmäßig verteilte veränderliche Last auf die drei Trägerarten ausübt. Beim Balken ist ebenfalls als Normalbelastungsfall Eigengewicht und halbe gleichmäßig verteilte Verkehrslast angenommen.

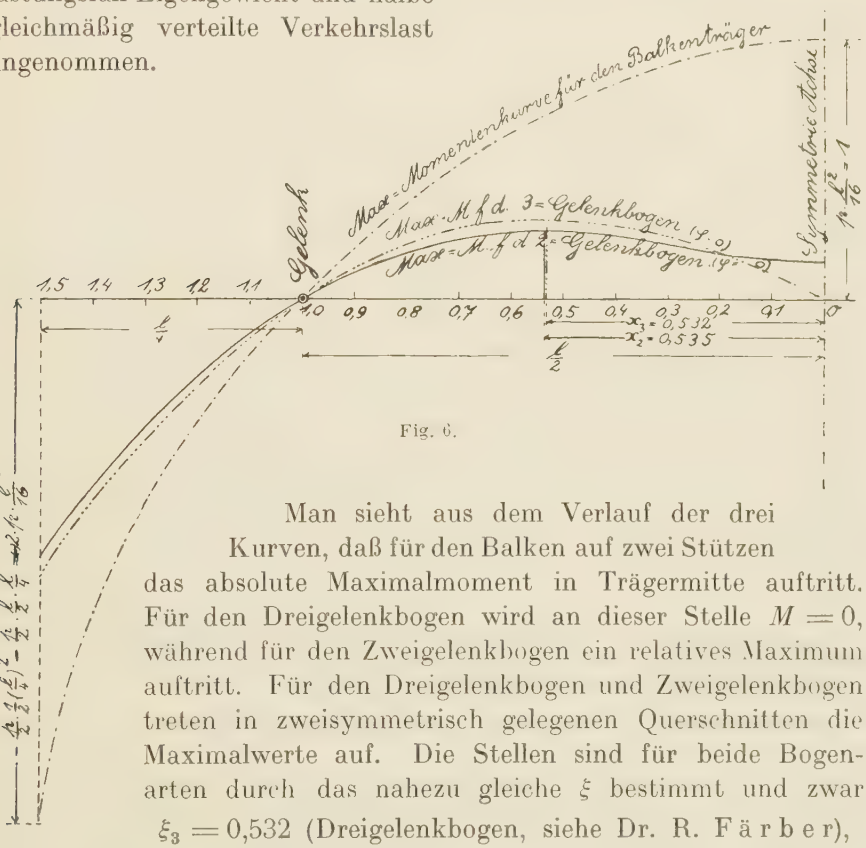

Fig. 6.

Man sieht aus dem Verlauf der drei Kurven, daß für den Balken auf zwei Stützen das absolute Maximalmoment in Trägermitte auftritt. Für den Dreigelenkbogen wird an dieser Stelle $M = 0$, während für den Zweigelenkbogen ein relatives Maximum auftritt. Für den Dreigelenkbogen und Zweigelenkbogen treten in zweisymmetrisch gelegenen Querschnitten die Maximalwerte auf. Die Stellen sind für beide Bogenarten durch das nahezu gleiche ξ bestimmt und zwar

$\xi_3 = 0{,}532$ (Dreigelenkbogen, siehe Dr. R. Färber),
$\xi_2 = 0{,}535$ (Zweigelenkbogen, siehe S. 26).

An dieser Stelle möge an den großen Vorteil des Zweigelenkbogens, der in dem besseren Momentenausgleich und demnach gleichmäßigeren Materialausnutzung und dem Fehlen eines Scheitelgelenkes und der dadurch erzielten größeren Steifigkeit liegt, hingewiesen werden. Besonders ist noch hervorzuheben, daß die Momente etwa 20% ge-

ringer als beim Dreigelenkbogen ausfallen, sowie daß die schädlichen Stöße auf das Scheitelgelenk ausgeschaltet werden.

Nach der Kenntnis von $\pm M$ in einzelnen Querschnitten des inneren und des äußeren Bogenteiles können wir für die gleichen Punkte den Wert $\frac{M}{1+y'^2}$ bilden. Die Größen M entnehmen wir zu diesem Zwecke unserer aufgestellten Tabelle; die Werte für $1+y'^2$ berechnen wir aus unserer gegebenen Kurvengleichung, nach der

$$\eta = \frac{1}{\varphi'} \cdot \xi^2 (1 + \varphi \cdot \xi^2) \quad \text{oder}$$

$$y = 4f \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{1 + \varphi \cdot 4 \frac{x^2}{l^2}}{\varphi'}$$

ferner $$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{4f}{\varphi' \cdot l} \cdot \xi (1 + 2\varphi \cdot \xi^2) = \frac{2\lambda}{\varphi'} \xi (1 + 2\varphi \cdot \xi^2)$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{4\lambda^2 \cdot \xi^2}{\varphi'^2} (1 + 2\varphi \cdot \xi^2)^2$$

gefunden wird, wobei das Verhältnis $\frac{f}{\frac{l}{2}}$ mit λ bezeichnet wurde.

Wir sehen, daß — im Gegensatz zu den Momenten allein — jetzt auch die Pfeilhöhe in Frage kommt. Wir können daher die Lösung des Maximalwertes von $\frac{\mathfrak{M}}{1+y'^2}$ nicht allgemein angeben, sondern müssen eine ausreichende Anzahl von λ einführen und je für einen angenommenen λ-Wert die Aufgabe lösen. Die fünf ausgerechneten M-Kurven ($\varphi = 0$; 0,2; 0,4; 0,6 u. 0,8) dienen nun dazu, je sechs Kurven $\frac{M}{1+y'^2}$ zu liefern, die durch ein angenommenes λ und φ bestimmt sind. Die Auswertung blieb auf vier Werte in der Nähe der Maximalstelle beschränkt und es wurde durch diese vier Punkte eine Lagrange-Interpolationskurve gelegt, deren Maximalwert dann bestimmt werden konnte. Der Wert für $\lambda = 0$ stellt einen praktisch nicht möglichen Fall dar. Gleichwohl ist er, um die Gesetzmäßigkeit erkennen zu lassen, mit angegeben, um so mehr, da er ja die Stelle des Maximalwertes von $\pm M$ allein darstellt. Es ist nämlich y' für $\lambda = 0$ gleich 0, d. h. $\frac{M}{1+y'^2} = \pm M$. Die folgende Tabelle enthält die

Werte für ξ. Der Vergleich mit den Werten des Dreigelenkbogens zeigt eine geringe Abweichung.

Tabelle II.

ξ Werte für die maßgebende Fuge.

$\lambda =$

$\varphi =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,535	0,530	0,515	0,490	0,466	0,436
0,2	0,548	0,543	0,524	0,505	0,480	0,449
0,4	0,563	0,557	0,527	0,509	0,476	0,447
0,6	0,576	0,569	0,550	0,523	0,481	0,460
0,8	0,584	0,573	0,555	0,526	0,494	0,476

Wir sehen, daß die maßgebende Fuge nahe bei $\xi = 0{,}500$ liegt, bei flachen Bögen etwas mehr nach den Kämpfern rückt und bei steilen Bögen der Bogenmitte sich nähert.

Der Wert von max. $\frac{M}{1 + y'^2}$ wurde nun für die oben angegebenen Mittelpunkte ξ ermittelt. Es wurden dazu die Gleichung (15) für max. $\pm M$ verwendet. Da sich ξ in bezug auf die oben angewandten λ-Werte nicht stark ändert, würden die Mittelwerte für die dazwischen liegenden Werte $\lambda = 0{,}05$; 0,15 usw. und dann ebenfalls die $\frac{M}{1 + y'^2}$ Werte berechnet.

Nachstehende Tabelle enthält diese Werte.

Tabelle III.

$$\frac{M}{1 + y'^2}.$$

$\longrightarrow \lambda$

$\varphi -$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,26	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	$\varphi =$
0,0	0,259	0,258	0,255	0,251	0,247	0,242	0,236	0,230	0,223	0,216	0,209	0,0
0,2	0,260	0,260	0,257	0,254	0,250	0,245	0,240	0,334	0,228	0,221	0,214	0,2
0,4	0,262	0,262	0,259	0,256	0,252	0,248	0,243	0,238	0,232	0,226	0,219	0,4
0,6	0,265	0,264	0,261	0,257	0,253	0,249	0,245	0,240	0,235	0,229	0,223	0,6
0,8	0,267	0,266	0,263	0,259	0,255	0,251	0,247	0,243	0,238	0,232	0,226	0,8

Nach unseren Ausführungen im dritten Kapitel (S. 17) muß nun der Wert $\frac{\mathfrak{M}}{1+y'^2}$ der maßgebenden Fuge im inneren Bogen gleich dem Wert $\frac{\mathfrak{M}}{1+y'^2}$ in dem äußeren Bogen werden. Da wir $\pm M$ auch für in Betracht kommende Punkte im äußeren Bogenteil berechnet haben, können wir nun für angenommenen Wert von λ und φ Ausdruck $\frac{M}{1+y'^2}$ im äußeren Bogenteil berechnen und den Verlauf für ein konstantes λ und φ aufzeichnen. Diese Kurven haben für $\xi = 1{,}0$ den Wert 0,0 und wachsen dann sehr rasch. An jener Stelle, an welcher der Wert $\frac{M}{1+y'^2}$ des äußeren Bogenteils den gleichen Betrag annimmt, wie er sich im inneren Bogenteil bei gleichem λ und φ ergeben hatte, liegt die gesuchte Kämpferfuge. Es gehört also zu einem l und f und φ des inneren Bogens ein l' des äußeren Bogens. Der Wert f' ist dann bereits bestimmt. Praktisch ist die umgekehrte Aufgabe zu lösen, weil ja die Kämpferfuge sowie die Größe φ und $\frac{f'}{l'}$ gegeben sind. Aus der durch die Gleichung der Mittellinie gegebenen Beziehung ergibt sich

$$y = 4\,\frac{x^2}{l^2}\cdot f\cdot\frac{1+4\,\varphi\cdot\frac{x^2}{l^2}}{\varphi'},$$

für $x = l$

$$y = f' = \frac{l'^2}{l^2}\cdot f\,\frac{1+\varphi\cdot\frac{l'^2}{l^2}}{\varphi'}.$$

Bezeichnet man $\frac{f'}{\frac{l'}{2}}$ mit λ_k und $\frac{\frac{l'}{2}}{\frac{l}{2}}$ mit ξ_k, so ergibt sich

$$\lambda_k = \lambda\cdot\xi_k\cdot\frac{1+\xi_k}{\varphi'} \quad \ldots\ldots\ldots (16$$

wobei $\varphi' = 1+\varphi$ ist.

Für die günstigste Vorkragung ergaben sich nun die in der folgenden Tabelle IV aufgeführten Beziehungen. Daraus findet man bei gegebenen λ_k und φ ohne weiteres die Gelenkspannweite l, indem man l' durch den angegebenen Wert ξ dividiert, also

$$l = \frac{l'}{\xi} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

Tabelle IV.

ξ_k-Werte.

$\rightarrow \lambda$.

$\varphi =$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	$\varphi =$
0,0	1,179	1,182	1,188	1,196	1,205	1,218	1,231	1,246	1,260	1,275	0,0
0,2	1,161	1,165	1,172	1,183	1,197	1,212	1,231	1,251	1,274	1,298	0,2
0,4	1,149	1,153	1,162	1,174	1,191	1,210	1,233	1,256	1,282	1,308	0,4
0,6	1,139	1,146	1,155	1,170	1,186	1,206	1,230	1,256	1,286	1,315	0,6
0,8	1,135	1,141	1,152	1,167	1,185	1,205	1,227	1,252	1,280	1,310	0,8

Wir sind somit am Schlusse unserer Untersuchung angelangt, die es ermöglicht, die günstigste Gelenklage in Hinblick auf die aufgestellte Forderung in kurzer Zeit festzustellen. Da ein kleinstmöglicher Ausschlag der Stützlinie auch eine möglichst geringe Querschnittsabmessung zur Folge hat, wird eine erhebliche Materialersparnis gegenüber einem nicht vorgekragten Gewölbe erzielt. Durch das dreimalige Auftreten des größten relativen Ausschlages der Stützlinie erreichen wir ferner einen gleichmäßigeren Verlauf der Bogenabmessungen, so daß auch in ästhetischer Hinsicht der vorgekragte Bogen dem nicht vorgekragten überlegen sein dürfte.

V. Bestimmung der günstigsten Vorkragung.

Anwendung.

Die Vorteile, welche sich durch eine geeignete Vorkragung ergeben, mögen an Hand eines Beispieles besonders nachgewiesen werden.

Es sei eine Straßenbrücke zu konstruieren. Infolge der geringen Konstruktionshöhe ist sowohl ein eingespanntes Gewölbe wie ein Dreigelenkbogen nicht zweckmäßig. Wir wählen als Tragkonstruktion einen Zweigelenkbogen, dessen Mittellinie als Stützlinie für Eigengewicht und halber gleichmäßig verteilter Verkehslast (Normalbelastungsfall) ausgebildet ist. Die statische Berechnung lehnt sich an das von H. Marcus in der Zeitschrift »Eisenbeton« 1910, Heft 45, entwickelte Verfahren an.

I. Ermittlung der Bogenachse.

Die Bogenachse soll nach der Stützlinie für Eigengewicht und halber gleichmäßig verteilter Verkehrslast gebildet werden. Wir setzen als gegeben voraus und verwenden die gleiche Bezeichnungsweise wie Marcus.

Spannweite l von Kämpferfuge zu Kämpferfuge: $l = 27{,}2$ m; Kämpferpfeil $f : f = 2{,}2$ m.

Mittlere lotrechte Fugenhöhe $d_0 = 0{,}65$ m $= d\,x$, Aufschüttungshöhe im Scheitel bis Fahrbahnunterkante $h_s = 0{,}1$ m. Dieser Wert ist mit Absicht sehr gering angenommen, weil Zweigelenkbogen stets bei beschränkter Konstruktionshöhe gewählt werden sollen.

Aufschüttungshöhe über dem Kämpfer: $h_k = 2{,}3$ m.

Die spezifischen Gewichte betragen:

Für das Schüttungsmaterial	$\gamma_a = 1{,}6$ t/m³.
» » Gewölbematerial	$\gamma_b = 2{,}4$ t/m³.
» » Fahrbahnmaterial	$s = 0{,}7$ t/m².
Als Verkehrslast sei gegeben	$p = 1{,}0$ t/m² $= 2\,r$.

Die Gleichung der Gewölbelinie, bezogen auf die lotrechte Symmetrieachse und die Sehne des Bogens, lautet nach Gleichung (8) der Abhandlung von Marcus:

$$y = \frac{a^2}{b}\left(1 - a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{2C_2}{l'}\cdot x'\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$a^2 = \gamma_a \cdot h_k + \gamma_b \cdot ds + s + r = 1{,}6 \cdot 2{,}3 + 2{,}4 \cdot 0{,}65 + 1{,}2 = 6{,}44\ \text{t/m}^2,$$

$$b = \gamma_a \cdot \frac{h_k - h_s}{f} = 1{,}6\,\frac{2{,}3 - 0{,}1}{2{,}2} = 1{,}6\ \text{t/m}^3,$$

$$\frac{a^2}{b} = 4{,}03\ \text{m}, \qquad f \cdot \frac{b}{a^2} = \frac{2{,}2}{4{,}03} = 0{,}547,$$

$$a = 0{,}453, \qquad \frac{1}{a} = 2{,}208,$$

$$C_2 = \ln\left[\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}\right] = \ln\left[2{,}208 + \sqrt{3{,}88}\right] = \ln 4{,}18,$$

$$C_2 = \ln 4{,}18 = \ln 418 - \ln 100 = 1{,}43031.$$

$$y = 4{,}03\left(1 - 0{,}453\,\mathfrak{Cof}\,\frac{1{,}43031}{\frac{l'}{2}}\cdot x'\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

$\frac{x'}{\frac{l'}{2}}$	$\frac{x'}{\frac{l'}{2}} \cdot 1{,}43031$	Cof. $\frac{x'}{\frac{l'}{2}} \cdot 1{,}43031$	0,453 . . .	1 — . . .	y (m)
0,25	0,358	1,0649	0,483	0,517	2,08
0,50	0,715	1,2670	0,574	0,426	1,717
0,75	1,073	1,6337	0,741	0,259	1,044
1,00	1,4303	2,2096	1,000	0,000	0,000

Der zu dieser Stützlinie gehörige Horizontalschub beträgt nach Gleichung (7)

$$\frac{H_0}{b} = \left(\frac{l}{2\,C_2}\right) 2 = \left(\frac{13{,}6}{1{,}43031}\right) 2 = 90{,}6 \text{ m}^2.$$

$$H_0 = 145{,}0 \text{ t/m}.$$

II. Ermittlung der Einflußlinie für den Horizontalschub.

Die H-Einflußlinie folgt aus Gl. (13).

$$H = \frac{P \cdot H_0}{b} \cdot \frac{\nu}{T_z} (y_z - y),$$

wobei:

$$T_z = \left(\frac{a^2}{b}\right)^2 \cdot l \left(1 + \frac{a^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{C_2} \cdot \operatorname{Sin} C_2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$= 4{,}03^2 \cdot 27{,}2 \left(1 + \frac{0{,}453^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}453}{1{,}4303} \operatorname{Sin} 1{,}4303\right)$$

$$= 441{,}8 \cdot 0{,}167 = 73{,}7 \text{ m}^3$$

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{J_0}{F_0} \frac{1}{T_z}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\frac{J_0}{F_0} = \frac{d^3}{12 \cdot d} = \frac{d^2}{12} = \frac{0{,}65^2}{12}$$

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{0{,}65^2}{12} \frac{27{,}2}{73{,}7}} = 0{,}987$$

$$y_z = \frac{4\,f \cdot z}{l^2} (l - x) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{\frac{H_0}{b}} \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{(l - x)}{l} =$$

$$= 16{,}45 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{(l - x)}{l} .$$

Insgesamt ergeben sich folgende Zahlenwerte für die H-Einflußlinie:

$\frac{x}{l}$	$\frac{l-x}{l}$	$\frac{x(l-x)}{l^2}$	$16{,}45\,\frac{x(l-x)}{l^2}$	y_l	$y_z - y_l$	$\frac{H_0}{b}\cdot\frac{\nu}{T_z}$	$H=$
0,125	0,875	0,1093	1,796	1,044	0,752	1,21	0,91
0,250	0,750	0,1875	3,080	1,717	1,363	1,21	1,66
0,375	0,625	0,2340	3,845	2,080	1,765	1,21	2,15
0,500	0,500	0,2500	4,110	2,200	1,910	1,21	2,32

III. Verwertung der Einflußlinie.

Zuerst möge die Kämpferdrucklinie bestimmt werden. Die Höhe derselben über dem Halbierungspunkt der Bogensehne ist gegeben durch die Gleichung

$$y_k = \frac{1 \cdot x\,(l-x)}{H \cdot l} = \frac{13{,}6 \cdot 0{,}500}{2{,}32} = 2{,}93\ (\text{m}).$$

Für die Kämpferdrucklinie kann mit genügender Genauigkeit eine Gerade angenommen werden.

Nach der Bestimmung der allgemeinen Bogengrößen ergeben sich nach den aufgestellten Gleichungen die Werte für φ und λ wie folgt (Gl. 4)

$$\varphi = \frac{-\frac{y_1}{f} + \left(\frac{x_1}{\frac{l'}{2}}\right)^2}{+\frac{y_1}{f} - \left(\frac{x_1}{\frac{l'}{2}}\right)^4}$$

$$\varphi = \frac{-\frac{(2{,}2-1{,}717)}{2{,}2} + \left(\frac{0{,}5}{1}\right)^2}{+\frac{(2{,}2-1{,}717)}{2{,}2} - \left(\frac{0{,}5}{1}\right)^4} = 0{,}199 \simeq 0{,}20$$

und nach S. 28

$$\lambda = \frac{f}{\frac{l}{2}} = \frac{2{,}2}{13{,}6} = 0{,}162.$$

Die Stelle der gefährdetsten Fuge ergibt sich aus der Tabelle Nr. II für $\varphi = 0{,}20$ und $\lambda = 0{,}162$

$\xi_b = 0{,}531 \quad x =$ Abstand von der Symmetrielinie $= 7{,}22$ m,

$x' =$ Abstand vom Kämpfer $= 6{,}38$ m,

$$y = 4{,}03 \left(1 - 0{,}453 \operatorname{Cof} \frac{1{,}43031}{\frac{l'}{2}}\right) = 1{,}65 \text{ (m)}.$$

Der Belastungsscheidepunkt bestimmt sich aus der Proportion

$$k : x' - y_k : y = 2{,}93 : 1{,}65 \text{ (S. Fig. 3)}$$

$$k = 11{,}33 \text{ (m)}.$$

Abstand von der Symmetrieachse: $13{,}60 - 11{,}33 = 2{,}27$ (m).

$A_1 = + 0{,}5 \cdot 27{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 6{,}80$ t $\left(\frac{p}{2}\right.$ über die ganze Spannweite$\left.\right)$,

$A_2 = - 1{,}0 \cdot 11{,}33 \cdot \frac{21{,}53}{27{,}2} = - 8{,}97$ (t) $\Big\}$ (p links der Belastungsscheide weggenommen),

$A = + 6{,}80 - 8{,}97 = (\pm) 2{,}17$ (t),

$H = 2{,}27 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}20 = 4{,}99$ (t) (durchschn. Einflußordinate),

$M = - 2{,}17 \cdot 6{,}38 - 4{,}99 \cdot 1{,}65 + \frac{6{,}38^2}{2} \cdot 0{,}5$

$= - 13{,}82 - 8{,}23 + 10{,}17 = - 22{,}05 + 10{,}17$

$= \mathbf{- 11{,}88}$ (tm).

In folgenden Zeilen soll nun die Berechnung als v o r g e k r a g t e r Bogen erfolgen:

Die Gleichung der Bogenachse bleibt dieselbe.

Für $\varphi = 0{,}2$ und $\lambda_k = 0{,}162$ ergibt sich als günstigste Vorkragung (siehe Tabelle Nr. IV S. 31):

$$\xi_k = 1{,}173, \quad l' = \frac{l}{1{,}173} = \frac{27{,}2}{1{,}173}$$

$= 23{,}20$ m Verkragung: $\frac{27{,}2 - 23{,}2}{2}$

$= \mathbf{2{,}00}$ m.

$$y_k = 4{,}03 \left(1 - 0{,}453 \operatorname{Cof} \frac{1{,}43031}{\frac{l}{2}} \cdot 11{,}6\right) = 0{,}669 \text{ (m)},$$

$f = 2{,}200 - 0{,}669 = 1{,}531$ (m).

Da sich die Aufschüttungshöhe nach der Gleichung

$$h_x = h_k - \frac{h_k - h_s}{f} \cdot y$$

verteilt, ergibt sich für $x = 2$ m

$$h_x = 2{,}3 - \frac{2{,}3 - 0{,}1}{2{,}2} \cdot 0{,}669 = 2{,}3 - 0{,}669 = 1{,}631 \text{ m}.$$

Für den neuen Zweigelenkbogen ergibt sich nun

$$a^2 = \underset{x=2\,\text{m}}{\gamma_a \cdot h_x} + \gamma_b \cdot d\,s + r + s = 1{,}6 \cdot 1{,}631 + 2{,}4 \cdot 0{,}65 + \\ + 1{,}2 = 5{,}37 \text{ t/m}^2$$

$$b = \gamma_a \frac{(h_x - h_s)}{f} = 1{,}6 \cdot \frac{1{,}631 - 0{,}1}{1{,}531} = 1{,}6 \text{ t/m}^3$$

$$\frac{a^2}{b} = 3{,}356 \text{ m}; \quad f \cdot \frac{b}{a^2} = 0{,}456$$

$$\alpha = 1 - 0{,}456 = 0{,}544; \quad \frac{1}{\alpha} = 1{,}840$$

$$C_2 = \ln\left[\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}\right] = \ln\left[1{,}84 + \sqrt{2{,}39}\right] = \ln 3{,}353$$

$$C_2 = 5{,}81502 - 4{,}60517 = 1{,}20985.$$

Die Gleichung der Gewölbemittellinie, bezogen auf die lotrechte Symmetrieachse und die Sehne des Bogens lautet:

$$y = \frac{a^2}{b}\left(1 - \alpha \operatorname{Cof} \frac{2\,C_2}{l'} \cdot x'\right)$$

$$= 3{,}356\left(1 - 0{,}544 \cdot \operatorname{Cof} \cdot \frac{1{,}2099}{\frac{l'}{2}} \cdot x'\right).$$

Der zu dieser Stützlinie gehörige Horizontalschub beträgt nach Gleichung (7)

$$\frac{H_0}{b} = \left(\frac{l}{2\,C_2}\right)^2 = \left(\frac{11{,}6}{1{,}210}\right)^2 \cong 91 \text{ m}^2,$$

$$H_0 = 1{,}6 \cdot 91 \sim 145 \text{ t/m}.$$

Es ist der Horizontalschub für die Grundstellung in beiden Bogenarten der gleiche.

Ermittelung der Bogenkraft H und der Kämpferdrucklinie.

$$H = \frac{P \cdot H_0}{b} \cdot \frac{\nu}{T_z}(y_z - y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

wobei $T_z = \left(\frac{a^2}{b}\right)^2 \cdot l \left(1 + \frac{a^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{C_2} \cdot \mathfrak{Sin}\, C_2\right)$

$= 3{,}356^2 \cdot 23{,}20 \left(1 + \frac{0{,}544^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}544}{1{,}20985}\ \mathfrak{Sin}\, 1{,}21\right)$

$= 261{,}1 \cdot 0{,}118 = 30{,}8\ \text{m}^3,$

$\nu = \frac{1}{1 + \frac{J_0}{F_0} \cdot \frac{l}{T_z}} = \frac{1}{1 + \frac{0{,}65^2}{12} \cdot \frac{23{,}2}{30{,}8}} = 0{,}974$

$y_z = \frac{4fz}{l^2}(l - x) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{\frac{H_0}{b}} \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{l - x}{l}$

$= \frac{1}{2} \cdot 3{,}356 \cdot \frac{1}{91} \cdot 23{,}2^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{l - x}{l} = 9{,}93 \frac{x}{l} \frac{(l - x)}{l}$

$H_{\max} = \frac{(P)\ 91 \cdot 0{,}974}{30{,}8}\ (9{,}93 \cdot 0{,}25 - 1{,}531 = 2{,}74\ (P).$

y_k (Höhe der Kämpferdrucklinie über der Bogensehne):

$$y_k = \frac{x\,(l - x)}{H \cdot b} = \frac{11{,}6 \cdot 0{,}5}{2{,}74} = 2{,}12\ \text{(m)},$$

$$\lambda = \frac{f}{\frac{l}{2}} = \frac{1{,}531}{11{,}6} = 0{,}132.$$

Die Stelle der gefährdetsten Fuge ergibt sich für $\varphi = 0{,}20$ und $\lambda = 0{,}132$ nach der Tabelle Nr. II auf S. 29 zu

$$\xi = 0{,}537.$$

x (Abstand v. d. Symmetrieachse) $= 6{,}23$ (m)
x' (Abstand vom Kämpfer) $= 5{,}37$ (m)

Der Belastungsscheidepunkt ergibt sich aus der Proportion:

$$k : x' = y_k : y$$

$$k = \frac{x' \cdot y_k}{y} = \frac{5{,}37 \cdot 2{,}12}{1{,}130} = 10{,}8\ \text{(m)}.$$

Abstand des Belastungsscheidepunktes von der Symmetrieachse

$$11{,}6 - 10{,}8 = 0{,}8\ \text{m}.$$

$A_1 = (\pm)\, 0{,}5 \cdot 23{,}2 \cdot \frac{1}{2} = (+)\, 5{,}8\ \text{t}$ $\left(\frac{p}{2}$ über die ganze Spannweite gerechnet$\right)$,

$A_2 = (\mp)\, 1{,}0 \cdot 10{,}8 \cdot \frac{17{,}8}{23{,}2} = (\mp)\, 8{,}29\ \text{t}$ $\left(p$ links der Belastungsscheide weggenommen$\right)$,

A (gesamter Auflagerdruck) $= 5{,}80 - 8{,}29 = (\mp)\ 2{,}49$ (t),

$H = 2{,}70 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = (\mp)\ 2{,}16$ (t).

2,70 ist die durchschnittliche Einflußordinate.

Der Wert von H für $(\pm)\ \frac{p}{2}$ auf der Strecke $x = 0{,}8$ bis $x = \frac{l}{2}$ wird aufgehoben durch H für $(\mp)\ \frac{p}{2}$ auf der Strecke $x = -0{,}8$ bis $x = -\frac{2}{l}$, so daß nur die Strecke $2 \cdot 0{,}8$ in Betracht kommt.

$$M = (\mp)\ 2{,}49 \cdot 5{,}37\ (\mp)\ 2{,}16 \cdot 1{,}13\ (\pm)\ \frac{5{,}37^2}{2} \cdot 0{,}5$$

$$= (\mp)\ 13{,}38\ (\mp)\ 2{,}44\ (\pm)\ 7{,}21 = (\mp)\ \mathbf{8{,}61}\ (\text{tm}).$$

Beim Zweigelenkbogen, als einfach statisch unbestimmte Konstruktion, treten noch Beanspruchungen durch Temperaturänderung und elastische Bewegungen des Bogens auf. Es ist

$$H_t = \pm \frac{v}{T_z} \cdot \varepsilon \cdot E \cdot J_0 \cdot t_0 \cdot l$$

(Horizontalschub durch die Temperaturänderung entstanden.) (Siehe Marcus S. 54.)

Für Betongewölbe kann man setzen

$$H_t = \pm \frac{0{,}987}{73{,}7} \cdot \frac{1}{85\,000} \cdot 2\,150\,000 \cdot 20 \cdot 27{,}2 \cdot \frac{0{,}65^3}{12}.$$

Die Werte ε und E wurden an der »Düsseldorfer Versuchsbrücke« gefunden.

Nach Gleichung (11) ist für eine Verkürzung der Mittellinie

$$H_w = H_0\,(1 - \nu) = 145\,(1 - 0{,}987) \cong 1{,}9\ \text{t}.$$

H_t und H_w werden für beide Bogenarten gleich angenommen.

Wir erhalten für die die größte relative Abweichung der Stützlinie im nicht vorgekragten Gewölbe

$$\eta = \frac{\pm\,\mathfrak{M}}{1 + y'^2} \quad \text{(Gl. 5)}.$$

Bei einer Temperaturerhöhung ergibt sich

$$\Sigma M_1 = +\,11{,}88 + (4{,}1 - 1{,}9) \cdot 1{,}65 = 15{,}51\ (\text{t/m}).$$

1,65 ist die Höhe des Bogenmittelpunktes der Bruchfuge über der Gelenkverbindungsgeraden.

Bei einer Temperaturverminderung

$$\Sigma M_2 = -11{,}88 - (4{,}1 + 1{,}9) \cdot 1{,}65 = -21{,}78 \text{ tm}.$$

$$N_1 = 1{,}015\,[145 - 1{,}9 + 4{,}1 + 4{,}99] = 154{,}6 \text{ t}.$$

1,015 ist der Wert von $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ an der betrachteten Stelle. 4,99 t ist der Wert von H aus der Verkehrslast (siehe S. 35).

$$N_2 = 1{,}015\,[145 - 1{,}9 - 4{,}1 - 4{,}99] = 136{,}0 \text{ t},$$

$$n_1 = \frac{15{,}51}{154{,}6} = 0{,}100 \text{ (m)},$$

$$n_2 = \frac{-21{,}78}{136{,}0} = -0{,}160 \text{ (m)}.$$

Die relativ größte Abweichung ist dargestellt durch

$$\mu = \frac{n}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{0{,}160}{1{,}015} = 0{,}158.$$

Für den vorgekragten Bogen ergibt sich:

Maßgebende Fuge im inneren Bogenteil: $x = 6{,}23$ m,
$y = 1{,}13$ m.

Bei einer Temperaturerhöhung

$$\Sigma M_1 = 8{,}61 + (4{,}1 - 1{,}9) \cdot 1{,}13 = \mathbf{11{,}09} \text{ (tm)}.$$

Für eine Temperaturverminderung ergibt sich

$$\Sigma M_2 = 8{,}61 + (4{,}1 + 1{,}9) \cdot 1{,}13 = 15{,}39 \text{ (tm)}.$$

Die zugehörigen Normalkräfte ergeben sich zu

$$N_1 = 1{,}007\,[145 - 1{,}9 + 4{,}1 + 2{,}16] = 150 \text{ t},$$

$$N_2 = 1{,}007\,[145 - 1{,}9 - 4{,}1 - 2{,}16] = 138 \text{ t},$$

wobei 2,16 der Wert von H aus der Verkehrslast ist.

$$n_1 = \frac{11{,}09}{150} = 0{,}074 \text{ (m)},$$

$$n_2 = -\frac{15{,}39}{138} = 0{,}112 \text{ (m)}.$$

Die relativ größte Abweichung der Stützlinie aus der Bogenmittellinie ergibt sich zu

$$\mu_2 = \frac{0{,}112}{1{,}007} = 0{,}111.$$

Für die Kämpferfuge ergibt sich:

Der Abstand des Belastungsscheidepunktes von der Gelenkvertikalen zu

$$k = \frac{\frac{1}{2}(l' - l) \cdot y_k}{y_g} = \frac{2 \cdot 2{,}12}{0{,}669} = 6{,}34 \text{ m}.$$

wobei $\frac{1}{2}(l' - l)$ die Vorkragung, y_k die Höhe der Kämpferdrucklinie über der Gelenkverbindungsgeraden und y_g die Ordinate des Gelenkmittelpunktes über der Kämpferverbindungsgeraden bedeuten.

$$A_1 = (\pm)\, 0{,}5 \cdot 23{,}2 \cdot \frac{1}{2} = (\pm)\, 5{,}8 \text{ (t)},$$

$$A_2 = (\mp)\, 1{,}0 \cdot \frac{6{,}34 \cdot 20{,}03}{23{,}2} = (\mp)\, 5{,}48 \text{ (t)},$$

$$A = (\pm)\, 5{,}8\ (\mp)\, 5{,}48 = (\pm)\, 0{,}32 \text{ t},$$

$$H = 5{,}26 \cdot 0{,}5 \cdot 2 \left(2{,}18 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}56\right) = 13{,}46 \text{ t}.$$

$2{,}18 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}56$ durchschnittl. H = Einflußordinate.

$$M = 13{,}46 \cdot 0{,}669 + 2{,}00^2 \cdot \frac{0{,}5}{2} - 0{,}32 \cdot 2{,}00 = 9{,}35 \text{ (mt)}.$$

Nach der Tabelle 9,60 (mt).

Bei einer Temperaturerhöhung ist

$$\Sigma M_1 = 9{,}35 + (4{,}1 - 1{,}9) \cdot 0{,}669 = + 10{,}82 \text{ mt}.$$

Bei einer Temperaturverminderung

$$M_2 = - 9{,}35 - (4{,}1 + 1{,}9) \cdot 0{,}669 = - 13{,}36 \text{ mt}.$$

Die zugehörigen Normalkräfte ergeben sich zu

$$N_1 = 1{,}069\ [145 - 1{,}9 + 4{,}1 + 13{,}46] = 172 \text{ t}.$$
$$N_2 = 1{,}069\ [145 - (1{,}9 + 4{,}1) - 13{,}46] = 134 \text{ t}.$$

$$n_2 = \frac{13{,}36}{134} = 0{,}100 \text{ (m)},$$

$$\mu_2 = \frac{0{,}100}{1{,}069} = 0{,}094.$$

Zusammenfassung der Rechnungsergebnisse.

Für den relativ größten Ausschlag im nicht vorgekragten Bogen wurde $\mu = 0{,}158$ und im vorgekragten Bogen $\mu = 0{,}111$ gefunden, mithin hat sich der relative Ausschlag der Stützlinie infolge der gewählten Vorkragung um rund 30% günstiger gestaltet.